

Examen final — 2021–2022



Examen Final d'Algèbre I

1ère année du cycle préparatoire

Durée : 2h

Année académique : 2021-2022

Les documents, calculatrices, etc, ne sont pas autorisés. Les réponses devront toujours être justifiées.

Exercice 1 : (9 pts)

On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit $u = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u)$, $f^2(u)$ et $f^3(u)$.
3. Montrer que $B' = \{u, f(u), f^2(u)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Ecrire la matrice A' de f dans la base B' .
5. Donner la matrice P de passage de la base B à la base B' puis calculer P^{-1} .
6. Donner la relation entre A , A' et P . Utiliser celle-ci pour vérifier la réponse à la question 4.
7. Echelonner la matrice A et en déduire le rang de f .
8. Donner les dimensions du noyau et de l'image de f puis déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
9. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$? justifier votre réponse.

Exercice 2 : (11 pts)

1. Résoudre le système linéaire qui suit (selon les valeurs des réels a et b) :

$$(S_{a,b}) \begin{cases} ax - by + t = a \\ bx + ay + z = b \\ y + az - bt = a \\ x + bz + at = b \end{cases}$$

2. On considère la matrice d'ordre 4 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Déterminer une factorisation LU de la matrice A telles que L est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure.
 b. Utiliser la factorisation LU pour résoudre le système linéaire

$$(S) \begin{cases} x - y + t = 1 \\ x + y + z = 1 \\ y + z - t = 1 \\ x + z + t = 1 \end{cases}$$

- c. Comparer le résultat trouvé avec ceux de la question 1.

Correction — 2021–2022

Correction de l'exercice 1

Pr MORDY Yassine - 0672762368

1.

Rappel du cours — § 4.9

La colonne j de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}$. Dans une autre base, on doit d'abord exprimer chaque image dans cette nouvelle base.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -2x + y - 3z \\ -x + y - 2z \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -2x + y - 3z, -x + y - 2z).$$

2.

Rappel du cours — § 3.2

Une application f est linéaire lorsque $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$. En particulier, $f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$.

On applique successivement la formule précédente :

$$f(u) = (1 - 1 + 0, -2 + 1 - 0, -1 + 1 - 0) = (0, -1, 0),$$

$$f^2(u) = (0 + 1 + 0, 0 - 1 - 0, 0 - 1 - 0) = (1, -1, -1),$$

$$f^3(u) = (1 + 1 - 2, -2 - 1 + 3, -1 - 1 + 2) = (0, 0, 0).$$

Le symbole $f^2(u)$ signifie $f(f(u))$, et non le carré des coordonnées de $f(u)$. Pour calculer $f^3(u)$, on reprend de même la formule de f avec les trois coordonnées du vecteur $f^2(u)$.

3.

Rappel du cours — Chapitre 2 — Familles libres et bases

Une famille est libre si une combinaison linéaire nulle impose que tous ses coefficients soient nuls. Dans un espace de dimension n , une famille libre de n vecteurs est une base.

Correction de l'exercice 1 (suite)

Soit $\alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0$. En coordonnées,

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $\gamma = 0$, la première $\alpha = 0$, puis la deuxième $\beta = 0$. La famille est libre et possède trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: c'est une base.

4.

Rappel du cours — § 4.9

La colonne j de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}$. Dans une autre base, on doit d'abord exprimer chaque image dans cette nouvelle base.

Pour lire une colonne de A' , il faut exprimer l'image du vecteur correspondant dans $\mathcal{B}'$, et non dans la base canonique.

$$f(u) = 0u + 1f(u) + 0f^2(u), \quad f(f(u)) = f^2(u), \quad f(f^2(u)) = 0.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base $\mathcal{B}'$, le premier vecteur est u , le deuxième $f(u)$ et le troisième $f^2(u)$. L'image du premier est donc le deuxième vecteur : sa colonne est $(0, 1, 0)^\top$. L'image du deuxième est le troisième : sa colonne est $(0, 0, 1)^\top$. L'image du troisième est nulle : sa colonne est $(0, 0, 0)^\top$.

5.

Rappel du cours — § 4.12

La matrice $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. Si $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ et $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$, alors $A' = P^{-1}AP$.

On place dans P les trois vecteurs u , $f(u)$ et $f^2(u)$, dans cet ordre :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rappel du cours — § 4.8 — Matrice compagnon

On juxtapose la matrice à inverser et I_n . Chaque opération est appliquée à la ligne entière, dans les deux blocs. Lorsque le bloc de gauche devient I_n , celui de droite est l'inverse recherché.

$$(P \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Correction de l'exercice 1 (suite)

Pour annuler le coefficient 1 de la colonne 1, ligne 2, on effectue

$$L_2 \leftarrow L_2 - (1)L_1.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On divise la ligne 2 par -1 pour obtenir un pivot égal à 1.

$$L_2 \leftarrow -1L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On divise la ligne 3 par -1 pour obtenir un pivot égal à 1.

$$L_3 \leftarrow -1L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Pour annuler le coefficient 1 de la colonne 3, ligne 1, on effectue

$$L_1 \leftarrow L_1 - (1)L_3.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Pour annuler le coefficient 2 de la colonne 3, ligne 2, on effectue

$$L_2 \leftarrow L_2 - (2)L_3.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Le bloc de gauche est maintenant I_3 . On lit à droite $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6.

Rappel du cours — § 4.12

La matrice $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. Si $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ et $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$, alors $A' = P^{-1}AP$.

La relation du cours est $A' = P^{-1}AP$. Calculons d'abord AP , puis multiplions à gauche par P^{-1} . On utilise la règle ligne-colonne.

Correction de l'exercice 1 (suite)

Rappel du cours — § 4.5

Le produit se calcule ligne par colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappel du cours — § 4.5

Le produit se calcule ligne par colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dernière matrice est bien $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, obtenue à la question 4.

7.

Rappel du cours — §§ 4.6 et 3.4

Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le rang. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de ses lignes non nulles. Pour une application linéaire, $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$ et $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$.

Effectuons les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières lignes sont non nulles et leurs pivots sont dans deux colonnes distinctes. Donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = 2$.

Pour voir les calculs de l'échelonnement :

$$\begin{aligned} L_2 + 2L_1 &= (-2 + 2 \cdot 1, 1 + 2(-1), -3 + 2 \cdot 2) = (0, -1, 1), \\ L_3 + L_1 &= (-1 + 1, 1 - 1, -2 + 2) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Le premier pivot vaut 1 en colonne 1. Le second vaut -1 en colonne 2. Il y a exactement deux lignes non nulles, donc deux pivots.

8.

Rappel du cours — § 3.3

$\text{Ker } f = \{x : f(x) = 0\}$ et $\text{Im } f = \{f(x) : x \in E\}$. L'application est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul. Elle est surjective si et seulement si son image est tout l'espace d'arrivée.

Correction de l'exercice 1 (suite)

$$\dim \operatorname{Ker} f = 1, \quad \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

Le système homogène échelonné donne

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$y = z, \quad x = -z, \quad (x, y, z) = z(-1, 1, 1).$$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((-1, 1, 1)).$$

Les deux premières colonnes de A sont indépendantes :

$$\alpha(1, -2, -1) + \beta(-1, 1, 1) = 0 \implies \alpha - \beta = 0, \quad -2\alpha + \beta = 0 \implies \alpha = \beta = 0.$$

Elles appartiennent à l'image, qui est de dimension 2. Ainsi

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1, -2, -1), (-1, 1, 1)).$$

Pour le noyau, le vecteur $(-1, 1, 1)$ est non nul ; sa famille à un élément est donc libre. Pour l'image, chaque colonne de A est l'image d'un vecteur de la base canonique. Les colonnes engendrent l'image. Deux colonnes indépendantes suffisent ici, puisque le rang est égal à 2.

9.

Rappel du cours — Chapitre 2 — Somme directe

$E = F \oplus G$ signifie que chaque vecteur de E s'écrit de manière unique comme $u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$. Cela équivaut à $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

La somme des dimensions vaut 3, mais cela ne suffit pas : il faut aussi une intersection réduite à $\{0\}$.

Le vecteur $(-1, 1, 1)$ engendre le noyau et est la deuxième colonne de A , donc appartient aussi à l'image. Ainsi

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f, \quad \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f \neq \{0\}.$$

La réponse est donc non.

Correction de l'exercice 2

Pr MORDY Yassine - 0672762368

1.

Rappel du cours — §§ 6.2 et 6.6

Un système peut avoir une solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution. L'équation $0 = 0$ n'impose aucune condition ; une équation $0 = c$ avec $c \neq 0$ rend le système impossible. Avant de diviser par une expression contenant un paramètre, on traite le cas où elle est nulle.

Les deux premières équations permettent d'exprimer z et t sans aucune division :

$$t = a - ax + by, \quad z = b - bx - ay.$$

On remplace ces expressions dans la troisième équation :

$$\begin{aligned} y + az - bt &= a \\ y + a(b - bx - ay) - b(a - ax + by) &= a \\ y + ab - abx - a^2y - ab + abx - b^2y &= a \\ (1 - a^2 - b^2)y &= a. \end{aligned}$$

Dans la quatrième équation :

$$\begin{aligned} x + bz + at &= b \\ x + b(b - bx - ay) + a(a - ax + by) &= b \\ x + b^2 - b^2x - aby + a^2 - a^2x + aby &= b \\ (1 - a^2 - b^2)x &= b - a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Le coefficient $1 - a^2 - b^2$ peut être nul. On distingue les cas avant de diviser.

Si $a^2 + b^2 \neq 1$, on obtient

$$x = \frac{a^2 + b^2 - b}{a^2 + b^2 - 1}, \quad y = \frac{-a}{a^2 + b^2 - 1}.$$

On remplace x et y dans les expressions de z et t . Les dénominateurs sont non nuls dans le cas étudié :

$$\begin{aligned} z &= b - b \frac{a^2 + b^2 - b}{a^2 + b^2 - 1} - a \frac{-a}{a^2 + b^2 - 1} \\ &= \frac{b(a^2 + b^2 - 1) - b(a^2 + b^2 - b) + a^2}{a^2 + b^2 - 1} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - b}{a^2 + b^2 - 1} = x, \\ t &= a - a \frac{a^2 + b^2 - b}{a^2 + b^2 - 1} + b \frac{-a}{a^2 + b^2 - 1} \\ &= \frac{a(a^2 + b^2 - 1) - a(a^2 + b^2 - b) - ab}{a^2 + b^2 - 1} \\ &= \frac{-a}{a^2 + b^2 - 1} = y. \end{aligned}$$

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{a^2 + b^2 - b}{a^2 + b^2 - 1}, \frac{-a}{a^2 + b^2 - 1}, \frac{a^2 + b^2 - b}{a^2 + b^2 - 1}, \frac{-a}{a^2 + b^2 - 1} \right).$$

Correction de l'exercice 2 (suite)

Si $a^2 + b^2 = 1$, les deux équations restantes deviennent $0 = a$ et $0 = b - 1$. Elles sont compatibles exactement pour $(a, b) = (0, 1)$. Dans ce cas, les équations initiales se réduisent à

$$t = y, \quad x + z = 1.$$

$$(x, y, z, t) = (s, r, 1 - s, r), \quad (s, r) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour tout autre point du cercle $a^2 + b^2 = 1$, il n'y a aucune solution. Les substitutions étant réversibles, la discussion est complète.

2.a-b.

Rappel du cours — § 6.7 — Factorisation LU

On part de $A^{(0)} = A$. À chaque étape, une matrice élémentaire $E^{(r)}$ réalise les opérations d'élimination : $A^{(r)} = E^{(r)} A^{(r-1)}$. À la fin, $U = A^{(n-1)}$ et $L = (E^{(1)})^{-1} \dots (E^{(n-1)})^{-1}$.

Pour cette résolution, on écrit le vecteur des inconnues et le second membre sous la forme

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le pivot de cette étape est le coefficient de la ligne 1, colonne 1 : 1. Il est non nul. Pour la ligne 2, le multiplicateur est

$$\frac{1}{1} = 1.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - (1)L_1.$$

Le coefficient de la ligne 3, colonne 1, est déjà nul ; cette ligne reste inchangée. Pour la ligne 4, le multiplicateur est

$$\frac{1}{1} = 1.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - (1)L_1.$$

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = E^{(1)} A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 (suite)

Le pivot de cette étape est le coefficient de la ligne 2, colonne 2 : 2. Il est non nul. Pour la ligne 3, le multiplicateur est

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{1}{2}\right)L_2.$$

Pour la ligne 4, le multiplicateur est

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - \left(\frac{1}{2}\right)L_2.$$

$$E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = E^{(2)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le pivot de cette étape est le coefficient de la ligne 3, colonne 3 : $\frac{1}{2}$. Il est non nul. Pour la ligne 4, le multiplicateur est

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - (1)L_3.$$

$$E^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = E^{(3)}A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dernière matrice est triangulaire supérieure. On pose donc $U = A^{(3)}$. Pour retrouver A , on inverse les opérations dans l'ordre indiqué par le cours :

$$A = (E^{(1)})^{-1}(E^{(2)})^{-1}(E^{(3)})^{-1}U.$$

Pour inverser une opération $L_i \leftarrow L_i - mL_j$, on effectue $L_i \leftarrow L_i + mL_j$. Les coefficients placés sous le pivot changent donc de signe dans la matrice élémentaire inverse.

$$(E^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 (suite)

$$(E^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E^{(1)})^{-1}(E^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E^{(3)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E^{(1)})^{-1}(E^{(2)})^{-1}(E^{(3)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a bien $A = LU$. Le système $AX = b$ devient $LUX = b$. On pose $Y = UX$: il reste à résoudre d'abord $LY = b$, puis $UX = Y$.

Rappel du cours — § 6.5 — Systèmes triangulaires

Pour une matrice triangulaire inférieure, on commence par la première équation. Pour une matrice triangulaire supérieure, on commence par la dernière équation puis on remonte. On remplace à chaque ligne les inconnues déjà calculées.

$$LY = b \iff \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ \frac{y_2}{2} + y_3 = 1 \\ y_1 + \frac{y_2}{2} + y_3 + y_4 = 1 \end{cases}$$

Équation 1 :

$$y_1 = 1$$

$$y_1 = 1 = 1$$

Équation 2 :

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_2 = 1 - (1)(1) = 0$$

Équation 3 :

$$\frac{y_2}{2} + y_3 = 1$$

Correction de l'exercice 2 (suite)

$$y_3 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)(0) = 1$$

Équation 4 :

$$y_1 + \frac{y_2}{2} + y_3 + y_4 = 1$$

$$y_4 = 1 - (1)(1) - \left(\frac{1}{2}\right)(0) - (1)(1) = -1$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$UX = Y \iff \begin{cases} t + x - y = 1 \\ -t + 2y + z = 0 \\ -\frac{t}{2} + \frac{z}{2} = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Équation 4 :

$$t = -1$$

$$(1)t = -1 = -1$$

$$t = \frac{-1}{1} = -1$$

Équation 3 :

$$-\frac{t}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)z = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Équation 2 :

$$-t + 2y + z = 0$$

$$(2)y = 0 - (1)(1) - (-1)(-1) = -2$$

$$y = \frac{-2}{2} = -1$$

Équation 1 :

$$t + x - y = 1$$

$$(1)x = 1 - (-1)(-1) - (1)(-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{1} = 1$$

La solution est $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 (suite)

Vérification :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.c.

Rappel du cours — §§ 6.2 et 6.6

Un système peut avoir une solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution. L'équation $0 = 0$ n'impose aucune condition ; une équation $0 = c$ avec $c \neq 0$ rend le système impossible. Avant de diviser par une expression contenant un paramètre, on traite le cas où elle est nulle.

Le système correspond à $a = b = 1$. On a $a^2 + b^2 - 1 = 1$, donc la formule de la question 1 donne bien $(x, y, z, t) = (1, -1, 1, -1)$.